• Εστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι: (1)

i) Αν $f(x)\geq g(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

ii) Αν m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$ αντίστοιχα, τότε:

$$m(\beta-\alpha)\leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq M(\beta-\alpha)$$

iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x > x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι γν. φθίνουσα και στη συνέχεια, νδο:

α. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\leq \frac{\eta\mu x}{x}\leq \frac{3}{\pi}$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

β. $\frac{\sqrt{3}}{4}\leq \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{x}\,dx \leq \frac{1}{2}$

iv) Η $f(x)=e^{-x^2}$, είναι γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια, μέσω της $e^x\geq 1+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ νδο:

α. $1-x^2\leq e^{-x^2}\leq 1$ $\forall x\in[0,1]$

β. $\frac{2}{3}\leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$.

ΛΥΣΗ

i) $f(x)-g(x)\geq 0$ Θεωρώ $\varphi(x)=f(x)-g(x)$

άρα $\varphi(x)\geq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Επίσης, η φ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών.

Επομένως, $\exists \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ και μάλιστα ισχύει

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))\,dx\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

ii) Η f φραγμένη συνάρτηση:

$$m \leq f(x) \leq M \overset{\exists \int_\alpha^\beta f(x)dx}{\Longleftrightarrow} \int_\alpha^\beta m\, dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \int_\alpha^\beta dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M \cdot \int_\alpha^\beta dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M(\beta - \alpha).$$

iii) $εφx > x \Rightarrow \frac{ημx}{συνx} > \Rightarrow \frac{ημx}{συνx} - > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{ημx - xσυνx}^{>0}}{\underbrace{συνx}_{>0}} > 0 \Rightarrow ημx - xσυνx > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{ημx}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{xσυνx - ημx}{x^2} = -\frac{ημx - xσυνx}{x^2} < 0$$

άρα η f γν. φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{ημ\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}$ και $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{ημ\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Ισχύει, ότι αφού τα $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{3}$ ακρα τότε:

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \overset{f \searrow}{\Longrightarrow} f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq f(x) \leq \frac{3}{\pi}, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

β. Η f συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Άρα, $\exists \int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)\, dx$ ώστε:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\, dx \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{ημx}{x} dx \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\pi}\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{ημx}{x} dx \leq \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{ημx}{x}\, dx \leq \frac{1}{2}$$

iv) $f(x)=e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 0$ ή $e^{-x^2}=0$ Αδύνατη

$\Rightarrow x = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	

• Η f γν. φθίνουσα $\forall x > 0$.

α. Η f παρουσιάζει ολ. μέγιστο στο 0 το $f(0)=1$, καθώς θα ισχύει εξ ορισμού

$f(x) \le f(0) = 1$

ή

$x \geq 0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(0) = 1$

Επίσης, $e^x \geq 1+x$

Θέτω $x=-x^2$, $e^{-x^2} \geq 1-x^2$, $\forall x \in [0,1]$

Άρα, $1-x^2 \le f(x) \le 1$.

β. Η $f(x)=e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$

άρα $\exists \int_0^1 f(x)\,dx$ και μάλιστα:

$\int_0^1 1-x^2\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$, $\forall x \in [0,1]$